Title	Trace Ring ト Quantum Logic I
Author(s)	小平, 邦彦
Citation	全国紙上数学談話会. 239 p.1152-p.1174
Issue Date	1942-07-31
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74989
rights	
Note	

1057. Trace Ring ト Quantum Logic I

小平　邦彦（東大）

§1. $\mathbb{P}$ ヲ實數体，又ハ複素數体トスル。$\mathbb{P}$ ノ上ノ n 次ノ行列環 $\mathbb{P}_n$ ヲ考ヘルト，$\mathbb{P}_n$ ニ於テハ $\mathbb{P}$ ノ上ノ algebra トシテノ代數的 operation ——スナハチ和，差，積，scalar 積——ノ他ニ，各元 $A=(a_{ik})$ ニ對シテ $A^*=(\bar{a}_{ki})$ ヲ對應セシムル operation $*$ ガ定義サレ，更ニ trace $A=\sum a_{ii}$ ナル numerical function ガ定義サレル．コレヲ一般化シテ次ノ定義ヲオク：

定義．$\mathbb{P}$ ヲ基礎体トスル ring $\mathbb{M}$ ガ次ノ二ツノ條件ヲ満足スルトキ $\mathbb{M}$ ヲ general trace ring トヨブ．

a) $\mathbb{M}$ ノ各元 A ニ對シテソノ "adjoint" トヨバレル元 A^* ガ定マリ，

$$(1.1.)\begin{cases} \text{i)} & A^{**}=A \\ \text{ii)} & (AB)^*=B^*A^* \\ \text{iii)} & (\rho A+\sigma B)^*=\bar{\rho}A^*+\bar{\sigma}B^*\text{；但シ } \rho,\sigma\in\mathbb{P} \end{cases}$$

トスル。

ガ成立スル。

b) Trace トヨバレル numerical function $T(A)$ ガ定義サレテヰテ，次ノ條件ガ成立ツ。

$$(1.2)\begin{cases} \text{i)} & T(1)=1 \qquad (1\text{ ハ }\mathbb{M}\text{ ノ單位元}) \\ \text{ii)} & T(A^*)=\overline{T(A)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{iii)} & T(A\cdot B) = T(B\cdot A) \\ \text{iv)} & T(\rho A+\sigma B) = \rho T(A) + \sigma T(B) \\ \text{v)} & A \neq 0 \text{ ナラバ } T(A^* A) > 0 \\ \text{vi)} & \sup\limits_{B,C\in \mathbb{M}} \dfrac{|T(CAB)|^2}{T(B^*B)T(C^*C)} < +\infty \end{cases}$$

General trace ring $\mathbb{M}$ ハ

(1.3.) $(A, B) = T(B^* A)$

ヲ inner product トスル(必ズシモ completeデハナイ) Hilbert space ト考ヘラレル．カク考ヘタトキノ norm ヲ $\|A\|$ デ現ハシ，$\|\ \|$ デ定マル metric ヲ trace metric トヨブ。$B \in \mathbb{M}$ ニ対シテ

$$(1.4)\ \begin{cases} B^{\natural}: & B^{\natural}A = BA \\ B^{\flat}: & B^{\flat}A = AB \end{cases} \qquad (A \text{ ハ } \mathbb{M} \text{ ノ中ヲ動ク})$$

ニヨッテ定義サレタ $B^{\natural}$, $B^{\flat}$ ハ，(1.2) vi) カラ明ラカナル如ク，space $\mathbb{M}$ ノ bounded operator デアル。$\mathfrak{h} = \widetilde{\mathbb{M}}$ ヲ $\mathbb{M}$ カラ"$\|\ \|$ - 完全化"ニヨッテ得ラレル，(complete) Hilbert space トスレバ，$B^{\natural}$, $B^{\flat}$ ハ $\mathfrak{h}$ ノ bounded operator ニ一義的ニ擴張セラレル。コレヲ再ビ $B^{\natural}$, $B^{\flat}$ デ表ハシ，B ト $B^{\natural}$ ヲ同一ノモノト見做シテ $\mathbb{M}$ ヲ $\mathfrak{h}$ ノ bounded operator カラ成ル ring ト考ヘル．コノトキ

(1.5) $\|\!|A|\!\| = \sup\limits_{B,C} |T(CAB)| / \|B\| \|C\|$

トオケバ，$\|A\|$ ハ hy ノ linear operator トシテノ uniform topology ノ意味ノ norm ニ他ナラナイ．又 $B \to B^{*}$ ハ $\mathbb{M}$ ノ anti-isomorphic ナ表現ヲ與ヘル．

定義．General trace ring $\mathbb{M}$ ハ $\mathbb{A}=(A; A\in\mathbb{M}, \|A\|\leqq 1)$ ガ $\| \quad \|$-complete ナルトキ complete デアルト言ヒ，complete ナ general trace ring ヲ單ニ trace ring トヨブ．

定理1．General trace ring ハ（complete ナル）trace ring ニ拡張セラレル．

證明．$\lim_{\substack{j\to\infty \\ k\to\infty}} \|A_j - A_k\| = 0$，且 $\|A_j\| \leqq C < +\infty$ ナル sequence ヲ fundamental sequence ト考ヘテ，コノスベテノ limit ヲ $\mathbb{M}$ ニ附加ヘテ得ラレル space ヲ $\overline{\mathbb{M}}$ トシ，$\overline{\mathbb{M}}$ ニ於テ和，差，積，$*$，trace ヲ limit トシテ定義スレバ，$\overline{\mathbb{M}}$ ハ complete ナ $\mathbb{M}$ ノ拡張トナル．

コノ理由ニ基イテ，以下 trace ring ノミヲ考ヘル事ニスル．——— コノ trace ring ナル概念ハ J.v. Neumann ト F.J. Murray ノ所謂 factor of finite class ヲ一般化シタモノデアルガ，Neumann ノ未發表ノ結果ニヨレバ，trace ring ハ factor of finite class ノ"連續的直和"ニ分解サレルモノト思ハレル．ココデハ

i) trace ring 内ノ projection ノ全體ハ

complete ortho complemented modular lattice ヲ作ルコト，及ビ

ii) trace ring ハ regular ring ニ拡張セラレル。

コトヲ示シ，更ニコレニ関係シタ二三ノコトニツイテ述ベテ見タイ。

§2. 以下常ニ $\mathbb{M}$ ハ trace ring デアルトシ，$\mathfrak{h} = \widetilde{\mathbb{M}}$，且ツ $\mathbb{M}$ ハ $\mathfrak{h}$ ノ bounded operator カラ成ルモノト考ヘル。スナハチ $B \in \mathbb{M}$，$f \in \mathfrak{h}$ ニ對シテ $B \cdot f$ ハ §1 ニ述ベタ意味デ，B ヲ $\mathfrak{h}$ ノ bounded operator ト考ヘタトキノ積ヲ現ハスモノトスル。又 $f \cdot B$ ヲ

(2.1) $\quad fB = B^{\Psi} f$

ニヨッテ定義スル。明ラカニ。

$$(2.2.)\begin{cases} \text{i)} & fB,\ Bf \text{ ハ distributive デアル.} \\ \text{ii)} & f(BA) = (fB)A \\ \text{iii)} & A(Bf) = (AB)f \\ \text{iv)} & (Af)B = A(fB) \\ \text{v)} & \|Bf\| \leqq |||B|||\ \|f\| \\ \text{vi)} & \|fB\| \leqq |||B|||\ \|f\| \end{cases}$$

又 $\mathbb{M}$ ニ於ケル operation $A \rightarrow A^*$ ハ唯一通リニ $\mathfrak{h}$ 内ニ連續的ニ擴張セラレル。コレヲ $f \rightarrow f^*$ デ現ハスコトニスル。明ラカニ；

$$\begin{cases} \text{i)} & f^{**} = f \\ \text{ii)} & (\rho f + \sigma g)^* = \bar{\rho} f^* + \bar{\sigma} g^* \end{cases}$$

$$(2.3)\begin{cases} \text{iii)} & (f,\ g) = \overline{(g^*,\ f^*)} \\ \text{iv)} & \|f\| = \|f^*\| \\ \text{v)} & (Bf)^* = f^* B^* \\ \text{vi)} & (fB)^* = B^* f^* \end{cases}$$

ガ成立スル．従ッテ $f \to f^*$ ニヨッテ $\mathbb{M}$ ハ $\mathbb{M}^\psi$ ニ conjugate isomorph ニ寫サレル．

Lemma 2.1. $\mathfrak{h}_f$ ノ bounded operator $\bar{A}$ ニ對シテ，若シ

(2.4) $\quad A_j \in \mathbb{M},\ |||A_j||| \leqq C < +\infty,\ \lim_j A_j = \bar{A}$ in strong topology ナル A_j ガ存在スルナラバ，$\bar{A} \in \mathbb{M}$ デアル。

證明　$\mathfrak{h}_f$ ノ operator トシテ A_j ガ $\bar{A}$ ニ強收斂スルノデアルカラ，$\lim_j \|A_j \cdot 1 - \bar{A}\cdot 1\| = 0$．故ニ $A_j \cdot 1 = A_j$ ダカラ $\lim \|A_j - A_k\| = 0$.

從ッテ $\mathbb{M}$ ガ complete（§1 ニ定義シタ意味デ）ナルコトカラ $\lim \|A_j - A\| = 0$ ナル $A \in \mathbb{M}$ ガアル。$B \in \mathbb{M}$ ヲ任意ニトルト $\|A_j B - AB\| \leqq |||B|||\ \|A_j - A\| \to 0$. 一方 A_j ガ $\bar{A}$ ニ強收斂スルコトカラ $\|A_j B - \bar{A}B\| \to 0$. 故ニ $AB = \bar{A}B$．故ニ $A = \bar{A}$.

Lemma 2.2. $A \in \mathbb{M}$ ノトキ A ノ canonical decomposition ヲ $A = WH$（H ハ self adjoint, $\geqq 0$, W ハ partially isometric），$H = \int \lambda\, dE_H(\lambda)$

トスレバ $H \in \mathbb{M}$, $E_H(\lambda) \in \mathbb{M}$デアル.

証明　H, $E_H(\lambda)$ ハ, $H=\sqrt{A^*A}$ デアルカラ, 共ニ A^*A ノ適当ナ *polynom* $p_j(A^*A)$ ニヨッテ (2.4) ノ意味デ近似セラレル. 故ニ前 *Lemma* ニヨッテ $\mathbb{M}$ ニ含マレルコトガ分ル。

定理 2. $f \in \mathfrak{h}$ ガ $\mathbb{M}$ ($\mathbb{M} \subseteq \mathfrak{h}$ デアル) ニ含マレルタメノ必要且充分ナ條件ハ

$$(2.5) \quad \sup_{B\in\mathbb{M}} \|fB\|/\|B\| < +\infty$$

デアル。

証明. 必要ナコトハ明白. 充分ナコトヲ次ニ示ス. $\mathfrak{h}$ ノ定義カラ $\lim_j \|f-A_j\| = 0$ ナル $A_j \in \mathbb{M}$ ガアル. A_j ノ *canonical decomporition* ヲ $A_j = W_j H_j$, $H_j = \int \lambda \, dE_j(\lambda)$ トシ, $S=\sup_B \|fB\|/\|B\|$ ヲ用ヒテ $E_j = E_j(s+i)$, $F_j = 1-E_j$ トオク。 明ラカニ $\|F_j\| \leqq 1$, $\|fF_j\| \leqq S\|F_j\|$,

又

$$\|A_jF_j\|^2 = T(F_jA_j^*A_jF_j) = T(F_jH_j^2F_j)$$

$$= T\left(\int_{S+1}^{\infty} \lambda^2 \, dE_j(\lambda)\right)$$

$$\geqq (s+1)^2 T\left(\int_{S+1}^{\infty} dE_j(\lambda)\right) = (s+1)^2 T(F_j)$$

$$= (s+1)^2 \|F_j\|^2$$

デアルカラ, $\|A_jF_j\| \geqq (s+1)\|F_j\|$デアル. 故ニ

$$\lim \|F_j\| \leqq \lim (\|A_j F_j\| - \|f F_j\|)$$
$$\leqq \lim \|(A_j - f) F_j\| \leqq \lim \|A_j - f\| \, ||| F_j ||| = 0$$

故ニ假定 (2.5) ニヨッテ

$$\lim \|f F_j\| = 0$$

デアル. 故ニ $\|f E_j - A_j E_j\| \leqq ||| E_j ||| \, \|f - A_j\| \leqq \|f - A_j\|$

ダカラ

$$\lim_j \|f - A_j E_j\| \leqq \lim \|f F_j\| + \lim \|f E_j - A_j E_j\|$$
$$= 0$$

明ラカニ $A_j E_j \in \mathbb{M}$, $\|A_j E_j\| \leqq S+1$ デアル. 故ニ完全性ニヨッテ $f \in \mathbb{M}$.

通常ノ用法ニ從ッテ, $\mathfrak{H}$ ノスベテノ bounded operator ノ作ル ring ニ於ケル $\mathbb{M}$, $\mathbb{M}^{\Psi}$, etc. ノ "commutator algebra" ヲ $\mathbb{M}'$, $(\mathbb{M}^{\Psi})'$, etc. デ表ハス. 然ルトキハ

定理3. i) $\mathbb{M} = (\mathbb{M}^{\Psi})'$

ii) $\mathbb{M}^{\Psi} = \mathbb{M}'$

証明 i) $\mathbb{M} \subseteq (\mathbb{M}^{\Psi})'$ ハ明白デアル. $\bar{A} \in (\mathbb{M}^{\Psi})'$ トシ, $f = \bar{A} \cdot 1$ トオケバ明ラカニ

$$\|f B\| = \|B^{\Psi} f\| = \|B^{\Psi} \cdot \bar{A} \cdot 1\| = \|\bar{A} \cdot B^{\Psi} \cdot 1\|$$
$$= \|\bar{A} B\| \leqq ||| \bar{A} ||| \, \|B\|.$$

故ニ定理 2 ニヨッテ $f \in \mathbb{M}$. コレヲ A ト書ケバ $A = \bar{A} \cdot 1$ ヨリ, 任意ノ $B \in \mathbb{M}$ ニツイテ

$$AB = B^{\Psi} \cdot A = B^{\Psi} \cdot \bar{A} \cdot 1 = \bar{A} \cdot B^{\Psi} \cdot 1 = \bar{A} \cdot B$$

故ニ $\bar{A} = A \in \mathbb{M}$ デアル。

ii) 上ノ結果カラ先ヅ $\mathbb{M}' = (\mathbb{M}^{\natural})'' \supseteq \mathbb{M}^{\natural}$ ガ分ル. 逆ニ $A' \in \mathbb{M}'$ トシ $A' \cdot 1 = g$ トオクト

$$\|g^* B\| = \|B^* g\| = \|B^* A' 1\| = \|A' B^* 1\|$$
$$= \|A' B^*\| \leqq |||A'||| \, \|B^*\| = |||A'||| \, \|B\|$$

故ニ定理2ニヨッテ $g^* \in \mathbb{M}$. 故ニ $g \in \mathbb{M}$. コレヲ A トオク.

然ルトキハ任意ノ $B \in \mathbb{M}$ ニ對シテ

$$A'B = A'BI = BA'1 = Bg = BA = A^{\natural} B$$

故ニ $A' = A^{\natural} \in \mathbb{M}^{\natural}$ デアル。

コノ定理3ヨリ直チニ

定理4. $\mathbb{M}, \mathbb{M}^{\natural}$ ハ *weakly closed* デアル。

コトガ分ル. $\mathbb{M}, \mathbb{M}^{\natural}$ ハスナハチ *neumann* ノ言フ意味デ *ring* デアル。

§3. $\mathbb{M}$ ニ含マレル *projection*

—— コレヲ一般ニ E, F, *etc.* ノ文字デ現ハスコトニスル。—— ノ全体ハ, $EF = E$ ノトキ $E \leqq F$ ト書クコトニスレバ, $\leqq$ ナル *partially order* ニ関シテ *lattice* ヲ作ル. コレヲ $L_{\mathbb{M}}$ デ表ハス. $1 - E$ ヲ E ノ *ortho complement* ト考ヘレバ, $L_{\mathbb{M}}$ ハ *ortho complemented* デアッテ, 又明ラカニ *complete* デアル. $E \in \mathbb{M}$ ニ対シテ

(3.1) $\quad D(E) = T(E)$

トオキ, コレヲ E ノ *dimension* トヨブ. 又 $\mathfrak{H}$ ノ *closed linear subspace* $\mathfrak{M}$ ハ, ソノ *projection* $P_{\mathfrak{M}}$

ガ$\mathbb{M}$ニ含マレルトキ$\mathbb{M}$ニ屬スルト云ッテ$\mathfrak{M}$ヲ$\mathbb{M}$ト書キ，

(3.2) $\quad D(\mathfrak{M}) = T(P_{\mathfrak{M}})$

ニヨッテ定義サレルD($\mathfrak{M}$)ヲ$\mathfrak{M}$ノ *dimension* ト名付ケル。

$E, F, \cdots\cdots \in \mathbb{M}$ ノ代リニ對應スル$\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \cdots\cdots$ヲ$\mathbb{M}$ヲ考ヘレバ，$L_{\mathbb{M}}$ハ又$\mathbb{M}$ニ屬スル *closed linear subspace* ノ作ル *lattice* ト考ヘラレル。定義カラ明ラカナル如ク

(3.3) $\quad D(E) = (E\cdot 1, 1) = \|E\|^2$

従ッテD(E)ハ *weakly continuous* デアル。

定義．$E, F \in \mathbb{M}$ニ對シテ$E = W^*W$, $F = WW^*$ナル *partially isometric operator* $W \in \mathbb{M}$ガ存在スルトキ

(3.4) $\quad E \sim F$

ト書ク．又$\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ヲ$\mathbb{M}$ノトキ$P_{\mathfrak{M}} \sim P_{\mathfrak{N}}$ナラバ

(3.5) $\quad \mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$

ト書ク。

明ラカニ

$$
(3.6)\quad \begin{cases} \text{i)} & E \sim E, \\ \text{ii)} & E \sim F \text{ ナラバ } F \sim E, \\ \text{iii)} & E \sim F,\ F \sim G \text{ ナラバ } E \sim G, \\ \text{iv)} & E \sim F \text{ ナラバ } D(E) = D(F) \end{cases}
$$

Lemma 3.1. $A \in \mathbb{M}$ナルトキハ

(3.7) $[\text{Range } A^*] = \mathfrak{H} - (f;\ Af = 0) \sim [\text{Range}$
$A] = \mathfrak{H} - (f;\ A^*f = 0)$.

証明. A ノ canonical decomposition ヲ
$A = WH$ トスレバ明ラカニ $W \in \mathbf{M}$ デ $W^*W = P_{[\text{Range}}$
$_{A^*]}$, $WW^* = P_{[\text{Rang } A]}$ デアル ——.

Lemma 3.2. $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ ガ $\eta\,\mathbf{M}$ ナル closed linear subspace ナルトキ

(3.8) $(\mathfrak{M} \smile \mathfrak{N}) - \mathfrak{N} \sim \mathfrak{M} - (\mathfrak{M} \frown \mathfrak{N})$.

但シコヽデ " $\smile$ ", " $\frown$ ", " $-$ " ハ $L_{\mathbf{M}}$ ノ元トシテノ和,
積 ortho complement ヲ表ハス.

証明. $(\mathfrak{M} \smile \mathfrak{N}) - \mathfrak{N} = [\text{Range } (1 - P_{\mathfrak{N}}) P_{\mathfrak{M}}]$ デ
アルカラ, コレハ (3.7) ニヨッテ $\sim \mathfrak{H} - (f;\ (1 - P_{\mathfrak{N}}) P_{\mathfrak{M}} f$
$= 0)$ トナル, 明ラカニ $\mathfrak{H} - (f;\ (1 - P_{\mathfrak{N}}) P_{\mathfrak{M}} f = 0)$
ハ $\mathfrak{M} - (\mathfrak{M} \frown \mathfrak{N})$ ニ等シイ. 故ニ (3.8) ガ成立ツ。

コノ (3.8) ト (3.6) iv) ニヨッテ

(3.9) $D(\mathfrak{M} \smile \mathfrak{N}) + D(\mathfrak{M} \frown \mathfrak{N}) = D(\mathfrak{M}) + D(\mathfrak{N})$

ガ出ル. $D(\mathfrak{M})$ ハスナハチ modular デアル. 又 (3.3)
ヨリ $D(E) = 0$ ナラバ $E = 0$ デナケレバナラヌ。スナハチ
$D(\mathfrak{M})$ ハ positive デアル。

故ニ $L_{\mathbf{M}}$ ハ modular デナケレバナラナイ: スナ
ハチ

定理 5. $\mathbf{M}$ ノ projection ノ作ル lattice $L_{\mathbf{M}}$
ハ complete orthocomplemented modular
lattice デアッテ, $D(E)$ ハ $L_{\mathbf{M}}$ ニ於ケル positive

modular functionalデアル。

又D(E)ガweakly continuousナル事カラ

$$(3.10)\quad \begin{cases} D\left(\Sigma^{\cup}{}_{n=1}^{\infty} E_n\right)=\lim_{m\to\infty} D\left(\Sigma^{\cup}{}_{n=1}^{m} E_n\right), \\ D\left(\Pi_{\cap}{}_{n=1}^{\infty} E_n\right)=\lim_{m\to\infty} D\left(\Pi_{\cap}{}_{n=1}^{m} E_n\right) \end{cases}$$

ナルコトガ分ル。

§4. Trace ring $\mathbb{M}$ ノ上ノ n 次ノ行列環 $\overline{\mathbb{M}}=\mathbb{M}_n$ ハ

$$(4.1)\quad \overline{T}(\overline{A})=\frac{1}{n}\sum_j T(A_{jj}),\quad (\overline{A}=(A_{ik})\in\overline{\mathbb{M}})$$

ニヨッテ trace $\overline{T}$ ヲ導入スレバ trace ring トナル。$\overline{\mathbb{M}}$ ハ又，$\overline{\mathfrak{H}}=n\otimes\mathfrak{H}=\underbrace{\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{H}\oplus\cdots\cdots\oplus\mathfrak{H}}_{n}$ ノ operator ring ト考ヘラレル。

カク考ヘタトキ $\overline{\mathbb{M}}$ ヲ $n\otimes\mathbb{M}$ デ表ハス。$\overline{\mathbb{M}}$ ノ "Komplettierung" $\widetilde{\overline{\mathbb{M}}}$ ノ operator ring トシテノ $\mathbb{M}_n$ ト $n\otimes\mathbb{M}$ ハ weak, strong, 或ハ strongest topology ニ関シテ topologically ring isomorphic デアル。又 $(n\otimes\mathbb{M})'$ ハ $\mathbb{M}'$ ノ上ノ一次ノ行列環デ，ソレハ $\mathbb{M}'$ ト weak, strong, 或ハ strongest topology ノ意味デ topologically ring isomorphic デアル。

一般ニ $\mathbb{M}$ ガ Hilbert space $\mathfrak{H}$ ノ operator ring ナルトキ, $\mathfrak{h}$ ノ linear subspace $\mathfrak{a}$ ハ, スベテノ $A' \in \mathbb{M}'$ ニ對シテ $A'\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}$ ナルトキ $\mathbb{M}$ ニ含マレルトイヒ $\mathfrak{a}\,\eta\,\mathbb{M}$ ト書ク. 又 $\mathfrak{h}$ ノ linear operator Λ ハソノ domain ガ $\mathbb{M}$ ニ含マレ, 且ツ $f \in$ domain Λ ニ對シテ常ニ $A'\Lambda f = \Lambda A' f$ $(A' \in \mathbb{M}')$ ガ成立スルトキ $\mathbb{M}$ ニ含マレルトイヒ, $\Lambda\,\eta\,\mathbb{M}$ デ表ハス. Λ ニ對シテソノ "graph".

$$\overline{\mathfrak{a}}_\Lambda = (\Lambda f \otimes f;\ f \in \text{Domain } \Lambda)$$

ヲ考ヘルナラバ, $\Lambda\,\eta\,\mathbb{M}$ ナルタメノ必要且ツ充分ナル條件ハ $\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}$ ノ部分空間: $\overline{\mathfrak{a}}_\Lambda$ ガ $2 \otimes \mathbb{M}$ ニ含マレルコトデアル。

ヨク知ラレテヰル如ク, everywhere dence domain ヲ有スル linear operator Λ ガ closed operator ニ拡張サレルタメノ必要且ツ充分ナ條件ハ domain Λ^* ガ everywhere dence ナルコトデアッテ, コノ條件ガ満サレルトキ Λ^{**} ハ Λ ノ最小ノ拡張ヲ與ヘル。

吾々ハコレヲ $[\Lambda]$ デ表ハスコトニスル. Graph デ書ケバ

$$(4.2)\quad \overline{\mathfrak{a}}_{[\Lambda]} = [\overline{\mathfrak{a}}_\Lambda]$$

Lemma 4.1. $\Lambda\,\eta\,\mathbb{M}$ ナラバ $\Lambda^*\,\eta\,\mathbb{M}$, $\Lambda^{**} = [\Lambda]\,\eta\,\mathbb{M}$.

證明. i) $\Lambda\,\eta\,\mathbb{M}$ ナラバ $\overline{\mathfrak{a}}_\Lambda\,\eta\,2 \otimes \mathbb{M}$ $[\overline{\mathfrak{a}}_\Lambda] = \overline{\mathfrak{a}}_{[\Lambda]}$ ハ $\mathbb{M}$ ニ含マレル. 故ニ $[\Lambda]\,\eta$

ii) 同様ニ $(-g \otimes \Lambda^* g;\ g \in \mathrm{Domain}\,\Lambda^*) = \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{h} - \mathfrak{a}_{\Lambda}$ ガ $2 \otimes \mathbb{M}$ ニ含マレルコトカラ $\Lambda^*\ \eta\ \mathbb{M}$ ナルコトガ分ル。

—— 以下再ビ $\mathbb{M}$ ハ trace ring デアルトスル。

定義. $\mathfrak{h}(=\widetilde{\mathbb{M}})$ ノ linear submanifold $\mathfrak{a}\ \eta\ \mathbb{M}$ ハ任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ對シテ $\mathfrak{m}\ \eta\ \mathbb{M}$, $D(\mathfrak{m}) > 1-\varepsilon$ ナル closed manifold $\mathfrak{m}$ ヲ含ムトキ essentially dense デアルトイフ。

定理6. i) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ ガ共ニ $\eta\ \mathbb{M}$, 且ツ essentially dense ナラバ $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ モ $\eta\ \mathbb{M}$ 且ツ essentially dense デアル。

ii) $\mathfrak{a}$ ガ $\eta\ \mathbb{M}$, essentially dense, X ガ $\eta\ \mathbb{M}$ ナル closed linear operator ナラバ $(f;\ Xf \in \mathfrak{a})$ モ $\eta\ \mathbb{M}$ 且ツ essentially dense デアル.

証明. i) ハ定義カラ明白デアル. ii) ヲ証明スルタメニ $\overline{\mathfrak{h}} = 2 \otimes \mathfrak{h}$ ヲ考ヘ, コレヲ

$$\overline{\mathfrak{h}} = 2 \otimes \mathfrak{h} = \bar{\mathfrak{f}}_1 \oplus \bar{\mathfrak{f}}_2, \quad \bar{\mathfrak{f}}_1 = (f \oplus 0), \quad \bar{\mathfrak{f}}_2 = (0 \oplus f)$$

ト表ハシ, 又 $\overline{\mathbb{M}} = 2 \otimes \mathbb{M}$ ニ関スル dimension ヲ $\overline{D}$ トカク。

Lemma 4.2. X ガ $\eta\ \mathbb{M}$ 且ツ closed ナラバ $\overline{D}(\overline{\mathfrak{a}}_X) = \frac{1}{2}$ デアル。

何トナレバ $\overline{\mathfrak{a}}_X \cap \bar{\mathfrak{f}}_1 = 0$, $\overline{\mathfrak{a}}_X \cup \bar{\mathfrak{f}}_1 = \overline{\mathfrak{h}}$ デアルカラ.

— X ノ canonical decomposition ヲ $X = WH$, $H = \int_0^\infty \lambda\, dE(\lambda)$ トスレバ $XE(\lambda)$ ハ bounded デアッテ, 従ッテ $\mathfrak{N}_\lambda = (f;\ XE(\lambda)f \in \mathfrak{M})$ ハ任意ノ closed ナ $\mathfrak{M}$ ニ對シテヤハリ closed デアル. $\mathfrak{N}_\lambda$ ノ定義カラ

$$\overline{\mathfrak{b}}_1 \oplus \mathfrak{N}_\lambda = \overline{\mathfrak{b}}_1 \vee \left(\overline{\mathfrak{a}}_{XE(\lambda)} \wedge (\mathfrak{M} \oplus \overline{\mathfrak{b}}_2)\right)$$

従ッテコノ両辺ノ $\overline{D}$ ヲ考ヘレバ, $\overline{\mathfrak{b}}_1 \wedge \overline{\mathfrak{a}}_{XE(\lambda)} = 0$ ニヨッテ

$$\frac{1}{2}\left(1 + D(\mathfrak{N}_\lambda)\right) = \frac{1}{2} + \overline{D}\left(\overline{\mathfrak{a}}_{XE(\lambda)} \wedge (\mathfrak{M} \oplus \overline{\mathfrak{b}}_2)\right).$$

故ニ

$$\frac{1}{2} D(\mathfrak{N}_\lambda) \geqq \overline{D}(\overline{\mathfrak{a}}_{XE(\lambda)}) + \overline{D}(\mathfrak{M} \oplus \overline{\mathfrak{b}}_2) - 1$$

然ルニ $\overline{D}(\overline{\mathfrak{a}}_{XE(\lambda)}) = \frac{1}{2}$ デアル. 故ニ

$$D(\mathfrak{N}_\lambda) \geqq D(\mathfrak{M})$$

今コヽデ $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{a}$ ヲ $D(\mathfrak{M}) > 1-\varepsilon$ ナルヤウニトリ, λ ヲ $D(E(\lambda)) > 1-\varepsilon$ ナル様ニ定メテ $\mathfrak{M}' = E(\lambda)\mathfrak{H} \wedge \mathfrak{N}_\lambda$ トオケバ. 明ラカニ $\mathfrak{M}'$ ハ closed, $\eta\, M$, $\mathfrak{M}' \subset (f;\ Xf \in \mathfrak{a})$ デ, 上ノ結果カラ $D(\mathfrak{M}') > 1-2\varepsilon$ デアル. コレデ $(f;\ Xf \in \mathfrak{a})$ ガ essentially dense ナル事ガ分ッタ。

上ノ証明デ用ヒタ Lemma 4.2 カラ又次ノ定理ガ成立スル事ガ分ル:

定理7. X, Y ガ共ニ $\eta\, M$ ナル closed operator デ, $X \subseteq Y$ ナラバ $X = Y$ デアル. 従ッテ $\eta\, M$, [Domain ハ]

＝如何ナル linear operator Λ ノ ηM ナル closed ナ拡張ハ $[\Lambda]=\Lambda^{**}$ 以外ニハ存在シナイ。

変数 $x, x^*, y, y^*, \cdots\cdots$ ノ non-commutative polynomial $P(x, x^*, y, y^*, \cdots\cdots)$ ヲ考ヘ，ηM ナル closed operator $X, Y, \cdots\cdots$ ニ対シテ $P(X, X^*, Y, Y^*, \cdots\cdots)$ ナル operator ヲ作レバ，コレハ定理6カラ明カナル如ク，essentially dense domain ヲ有スル．$P(x, x^*, y, y^*, \cdots\cdots)$ ノ形式的ニ作ッタ"adjoint" ヲ $P^*(x, x^*, y, y^*, \cdots\cdots)$ トスレバ

$$(P(X, X^*, \cdots\cdots)f, g)=(f, P^*(X, X^*, \cdots\cdots)g)$$

が成立ツ．コレヨリ $(P(X, X^*, \cdots\cdots))^*$ が essentially dense domain ヲ有スルコトが知ラレ，從ッテ $[P(X, X^*, \cdots\cdots)]$ が作ラレル事が分ル。

コレニツイテ

Lemma 4.3. i) $[P(X, X^*, \cdots\cdots)]^*=[P^*(X, X^*, \cdots\cdots)]$

ii) $[\rho P(X, X^*, Y, \cdots\cdots)]=[\rho[P(X, X^*, Y, \cdots\cdots)]]$

iii) $[P(X, X^*, \cdots\cdots)+Q(X, X^*, \cdots\cdots)]$

$$=[[P(X, \cdots\cdots)]+[Q(X, \cdots\cdots)]]$$

iv) $[P(X, X^*, \cdots\cdots)\cdot Q(X, X^*, \cdots\cdots)]$

$$=[[P(X, \cdots\cdots)]\cdot[Q(X, \cdots\cdots)]]$$

又 $P(X, X^*, \cdots\cdots)$ カラ同類項ヲマトメテ得ラレル reduced polynomial ヲ $P^{(r)}(X, X^*, \cdots\cdots)$ デ表ハスコトニスレバ

v) $[P(X, X^*, \cdots\cdots)]=[P^{(r)}(X, X^*, \cdots\cdots)]$

証明 i) $(P(X, X^*, \cdots\cdots))^* \supseteq P^*(X, X^*, \cdots\cdots)$ ヨリ[ ]ヲ作レバ $(P(X, X^*, \cdots\cdots))^* \supseteq [P^*(X, X^*, \cdots\cdots)]$ ヲ得ル. 故ニ定理7カラ $[P^*(X, X^*, \cdots\cdots)] = (P(X, X^*, \cdots\cdots))^*$ デナケレバナラヌ。同様ニ $P(X, X^*, \cdots\cdots) \subseteq [P(X, X^*, \cdots\cdots)]$ ヨリ $[P(X, X^*, \cdots\cdots)]^*$ モ亦 $(P(X, X^*, \cdots\cdots))^*$ ニ等シイコトガ知ラレル. 故ニ $[P(X, X^*, \cdots\cdots)]^* = [P^*(X, X^*, \cdots\cdots)]$

ii)—iv) モ同様ニシテ証明サレル。

コノ Lemma カラ $\mathfrak{M}$ ナル closed linear operator ノ全体ハ和ヲ $[X+Y]$, 積ヲ $[X\cdot Y]$ ト定義スレバ $\mathfrak{H}$ ノ上ノ ring ヲ作ルコトガ知ラレル. 吾々ハ之ヲ $\mathcal{R}_{\mathfrak{M}}$ デ表ハスコトヽシ

$$X+Y=[X+Y]$$

$$X\cdot Y=[X\cdot Y]$$

ト書クコトニスル。$X \to X^*$ ハ明ラカニ $\mathcal{R}_{\mathfrak{M}}$ ノ (conjugate) anti-automorphism ヲ與ヘル。

定理 8. $\mathcal{R}_{\mathfrak{M}}$ ハ $\mathfrak{M}$ ヲ含ム regular ring デアル。

証明. $\mathfrak{M}$ ヲ含ムコトハ明ラカデアル. regular ナルコトヲ示スタメニ $X \in \mathcal{R}_{\mathfrak{M}}$ ニ對シテ, ソノ canonical decomposition ヲ

$$X = WH, \qquad H = \int_0^\infty \lambda\, dE(\lambda)$$

トシ, Y ヲ

$$Y = H_1 W^*, \quad H_1 = \int_{+0}^{\infty} \frac{1}{\lambda} dE(\lambda)$$

ト定義スル。然ルトキハ明ラカニ

$$X = XYX$$

§5. $X \in R_M$ デ generate サレル principal right ideal ヲ $(X)_r$, principal left ideal ヲ $(X)_l$, $(X)_r$ 全体ノ作ル lattice ヲ $\overline{R}$. $(X)_l$ 全体ノ作ル lattice ヲ $\overline{L}$ デ表ハス。

Lemma 5.1. i) $(X)_r = (P_{[\mathrm{Range}\, X]})_r$,

ii) $(X)_l = (P_{[\mathrm{Range}\, X^*]})_l$.

証明. X ニ對シテ定理8ノ証明ノトキニ定義シタ Y ヲ考ヘレバ

$$\begin{cases} XY = P_{[\mathrm{Range}\, X]} \\ YX = P_{[\mathrm{Range}\, X^*]} \end{cases}$$

デアル. コレヨリ直チニ Lemma ガ証明サレル。

定理9. i) $E \longleftrightarrow (E)_r$ ニヨッテ L_M ト $\overline{R}$ ガ lattice isomorphic ニナル。

ii) $E \longleftrightarrow (E)_l$ ニヨッテ L_M ト $\overline{L}$ ガ lattice isomorphic ニナル。

証明. 前 Lemma カラ $E \longrightarrow (E)_r$ ニヨッテ L_M ガ $\overline{R}$ ニ lattice homomorph ニ寫サレルコト明カデアル. ココデ $(E)_r = (F)_r$ デアッタトスルト $E = FE$, $F = EF$ ダカラ $E = F$ デナケレバナラヌ。 スナハチ

$E \longrightarrow (E)_r$ ハ逆一意的デアル．コレデ i) ガ証明サレタ．

ii) モ同様ニ証明サレル．

コノ isomorphism ニヨッテ $\overline{R}$, $\overline{L}$ ハ ortho complemented lattice トナル．コレニツイテ

定理10. i) $(X)_r$ ノ ortho complement ハ $(Y; X^*Y = 0)$ デアル．

ii) $(X)_l$ ノ orthocomplement ハ $(Y; YX^* = 0)$ デアル。

証明 i) $(X^*)_l = (P_{[\mathrm{Range}\, X]})_l$ デアルカラ $X^*Y = 0$ ナルタメニハ $P_{[\mathrm{Range}\, X]} Y = 0$ ナルコトガ必要且充分デアル．故ニ

$(Y; X^*Y = 0) = (Y; P_{[\mathrm{Range}\, X]} Y = 0) = (1 - P_{[\mathrm{Range}\, X]})_r$. コレハ明ラカニ $(X)_r = (P_{[\mathrm{Range}\, X]})_r$ ノ ortho complement デアル。

ii) モ同様ニシテ示サレル

$\mathbb{M}$ ノ center ヲ $\mathbb{Z}$, $\eta \mathbb{Z}$ ナル closed operator ノ作ル ring ヲ $\mathcal{R}_{\mathbb{Z}}$, $E \in \mathbb{Z}$ ナル E ノ作ル lattice ヲ $L_{\mathbb{Z}}$ トシ, $\mathcal{R}_{\mathbb{Z}}$ ノ principal right ideal ノ作ル lattice ヲ $\overline{R}_{\mathbb{Z}}$, principal left ideal ノ作ル lattice ヲ $\overline{L}_{\mathbb{Z}}$ トスル．然ルトキハ

定理11. i) $\mathcal{R}_{\mathbb{Z}}$ ハ $\mathcal{R}_{\mathbb{M}}$ ノ center デアル．

ii) $L_{\mathbb{Z}}$ ハ $L_{\mathbb{M}}$ ノ center デアル．

iii) $L_{\mathbb{Z}}$ ハ $\overline{R}_{\mathbb{Z}}$ ト lattice isomorphic デア

ル。

iv) $\mathbb{L}_{\mathbb{Z}}$ ハ $\overline{\mathbb{L}}_{\mathbb{Z}}$ ト lattice isomorphic デアル。

証明. i) $Z \in$ center of $\mathcal{R}_{\mathbb{M}}$ ナラバ, $A \in \mathbb{M}$ ニ対シテ $ZA = [ZA] = [AZ]$ デアルカラ, $AZ \subseteq ZA$. 故ニ $Z \,\eta\, \mathbb{Z}$.

逆ニ $B \in \mathbb{Z}$ ナラバ任意ノ $X \in \mathcal{R}_{\mathbb{M}}$ ニ対シテ $BX \subseteq XB$, 従ッテ $[BX] = [XB]$ デアル. $Z \,\eta\, \mathbb{Z}$ トシ, Z ノ canonical decomposition ヲ $Z = WH$, $H = \int \lambda\, dE(\lambda)$ トシヨウ. 然ルトキハ $E(\lambda) \in \mathbb{Z}$ デアルカラ, $X \,\eta\, \mathbb{M}$ ニ対シテ

$$[[ZX]E(\lambda)] = [E(\lambda)[ZX]] = [[E(\lambda)Z]X]$$
$$= [X[E(\lambda)Z]] = [[XZ]E(\lambda)]$$

スナハチ

$$E(\lambda)[ZX] \subseteq [ZX]E(\lambda) = [XZ]E(\lambda)$$

デアル. コノ事カラ $\lim_{\lambda} E(\lambda) = 1$ ニヨッテ $[ZX] = [XZ]$ が得ラレル. 故ニ Z ハ $\mathcal{R}_{\mathbb{M}}$ ノ center ニ含マレル。

ii) $E \in \mathbb{L}_{\mathbb{Z}}$ が $\mathbb{L}_{\mathbb{M}}$ ノ center ニ含マレルコトハ明白. 逆ニ E が $\mathbb{L}_{\mathbb{M}}$ ノ center ニ含マレルトスル. $\overline{R}_{\mathbb{M}}$ デ考ヘレバ $(E)_r$ ノ complement が一意的ニ定マル. 然ルニ $X \in R_{\mathbb{M}}$ ヲ任意ニトレバ $((1-E)+EX(1-E))_r$ ハ明カニ $(E)_r$ ノ complement デアル。

故ニコレハ $(1-E)\mathfrak{r}$ ト一致セネバナラナイ．故ニ $EX(1-E)=0$，スナハチ $EX=EXE$．E ト $(1-E)$ ヲ入レ換ヘテ考ヘレバ $XE=EXE$ ヲ得ル．故ニ $EX=XE$．故ニ $E\in L_{\mathfrak{X}}$．

iii), iv) ハ明白．

定理12．$\mathbb{Z}=\mathbb{P}$ ナル場合ニハ　i) $D(E)=D(F)$ ナルタメノ必要且ツ充分ナ條件ハ $E\sim F$ デアル．從ツテ又 $T=T(A)$ ハ $\mathbb{M}$ ノ代數的ナ構造ニヨッテ一意的ニ定マル。

何トナレバ，コノ場合ニハ $\mathbb{M}$ ハ $\mathfrak{h}=\widetilde{\mathbb{M}}$ ニ於ケル factor ニ他ナラナイカラデアル（Neumann: Rings of Operators I 參照）

§6．$L_{\mathbb{M}}$ ハ probability logic（或ハ quantum logic）ノ場トシテ適シテヰル。[1] E, F, ----- $\in L_{\mathbb{M}}$ ヲ物理的實驗事實ヲ述ベタ命題ト考

$$(6.1)\quad p(E\to F)=\frac{T(E\cdot F)}{T(E)}\qquad (E\neq 0)$$

---

1) Neumann ハ $L_{\mathbb{M}}$ トシテ既約 $(Z=1)$ ナル $\mathbb{M}$ ノ上ノ lattice ヲ用ヒテヰル（Neumann ノ quantum logic ニ關スル講義，或ハ Birkhoff: Lattice Theory, 128 頁參照）ガ，古典的ナ確率論ヲ含メテ考ヘルタメニハ一般ノ $\mathbb{M}$ ヲ考ヘタ方ガヨイ。

ヲEカラFヘノ *transition probability* ト定義スル．コレヲ又 $p_{E}(F)$ デ表ハス．特ニ $E=1$ ノトキ $p_{E}(F)$ ヲ $p(F)$ ト書ク．即チ

$$p(F)=p_{1}(F)=\mathrm{T}(F)$$

又

$$(6.2)\quad E\cdot F=F\cdot E$$

ノトキ，EトFハ同時観測可能デアルトイフ．例ヘバ次ノ定理ガ成立ツ。

定理13. i) $p(E\to F)=0$ ナルタメノ必要且ツ充分ナ條件ハ $E\cdot F=0$ ナルコトデアル。

ii) $p(E\to F)=1$ ナルタメノ必要且充分ナ條件ハ $F\geqq E$ ナルコトデアル。

iii) $F_1\cdot F_2=0$ ナラバ

$$p(E\to F_1\smile F_2)=p(E\to F_1)+p(E\to F_2)$$

iv) $p(E)\,p_{E}(F)=p(F)\,p_{F}(E)$

v) (Bayesノ定理) $\sum E_j=E_1+E_2+\cdots\cdots+E_n=1$ ナルトキハ

$$p_{F}(E_j)=\frac{p(E_j)\,p_{E_j}(F)}{p(E_1)\,p_{E_1}(F)+\cdots\cdots+p(E_n)\,p_{E_n}(F)}$$

注意 $\sum E_j=1$ ナルコトハ $E_j\cdot E_k=0\ (j\neq k)$ 且 $E_1\smile E_2\smile\cdots\cdots\smile E_n=1$ ト一致スル。

$L_{(M)}$ ニ於ケル"確率変数"ハ次ノ如ク定義セラレル：

定義．數空間 $(-\infty<x<+\infty)$ ノ Borel 集合族(B) カラ $L_{(M)}$ ヘノ連續且 *lattice homomorphic* ナ

mapping $x : B \to E_x(B)$ デアッテ，全空間 $(-\infty, +\infty) = E_x = 1$ が對應スルモノヲ確率変数(量子力学ノ言ヒ方デハ量)トヨブ。

明ラカニ $E_x(B)$ $(B \in (B))$ ノ全体ハ L_M ノ *Boolean sublattice* ヲ作ル。E，F が共ニ $\leqq E_0$ ナルトキ $E \cdot F = F \cdot E$ ナルタメノ必要且充分ナ條件ハ $E = (E \frown F) \smile (E \frown (E_0 - F))$ デアル。故ニ L_M ノ *Boolean sublattice* ノ *element* ハ相互ニ可換デアル。從ッテ $E_x(B)$ ハスベテ同時観測可能デアル。

定義．$E_x((-\infty, \lambda))$ ヲ x ノ分布命題函数ト名付ケ $E_x(\lambda)$ デ表ハシ，$f_E^{(x)}(\lambda) = \varphi_E(E_x(\lambda))$ ヲ條件 E ノ下ニ於ケル x ノ分布函数トヨブ。

$E_x(\lambda)$ ハ明ラカニ単調増大デ上カラ半連續デアル．$f_E^{(x)}(\lambda)$ モ同ジ性質ヲモツ．E ト x ヲ固定シテ考ヘルナラバ，x ハ $f_E^{(x)}(\lambda)$ ヲ分布函数トスル普通ノ確率変数ニ他ナラナイ。

吾々ハ確率変数 x が考ヘラレタトキ

$$(6.3) \qquad X = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE_x(\lambda)$$

ニヨッテ $\mathfrak{R}_M$ ノ *self adjoint operator* X ヲ定義スルコトが出来ル．逆ニ *self adjoint* ナ $X \in \mathfrak{R}_M$ が與ヘラレレバ (6.3) カラ $E_x(\lambda)$ が定マリ，從ッテ x が定マル。ソコデ吾々ハ x ヲ表ハスニ (6.3) デ定マル X ヲ以テシ，從ッテ $\mathfrak{R}_M$ ノ *self adjoint operator* ヲ

確率変数トヨブコトニスル。

注意　通常ノ確率論デハ確率ノ場ハ一ツノ集合Ωノ部分集合カラナルBorel field $\mathfrak{B}$デアッテ，確率変数ハΩノ$\mathfrak{B}$－可測函数$x(P)$ $(P\in\Omega)$デ表ハサレル．コノトキ，有界可測函数全体ノ作ルring $\mathbb{M}$ハ

$$T(x(P))=\int_{\Omega} x(P)\,p(dP)$$

ニヨッテtraceヲ導入スレバ可換ナtrace ringトナリ，$L_{\mathbb{M}}$ハ$\mathfrak{B}$トlattice isomorphicトナル．又$\mathfrak{R}_{\mathbb{M}}$ノself adjoint operatorハ丁度確率変数$x(P)$ト一致スル．コノ意味デ$L_{\mathbb{M}}$ハ確率ノ場ノ一般化ト考ヘラレル．

——（續ク）——